Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\sqrt{11} = 3,3166$ $\pi = 3,1416$.

E ORA PER QUALCOSA DI COMPLETAMENTE DIVERSO...

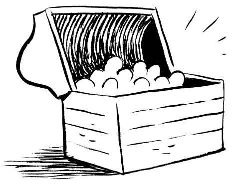
4 marzo 2016

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. ***Il primo dubbio di Tuono***

Quali sono i due numeri interi positivi che, moltiplicati tra loro, danno 2016 e, sottraendo il minore dal maggiore, si ottiene 20?
[Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola del rapporto tra il minore e il maggiore.]

2. ***I gioielli nello scrigno***



In uno scrigno vi sono 10000 gioielli, 5500 di questi sono verdi, mentre 4500 sono rossi; metà sono lisci, metà sono ruvidi. Quanti gioielli bisogna estrarre dallo scrigno per essere certi di aver estratto almeno un gioiello verde e liscio?

3. ***Igiene dentale***

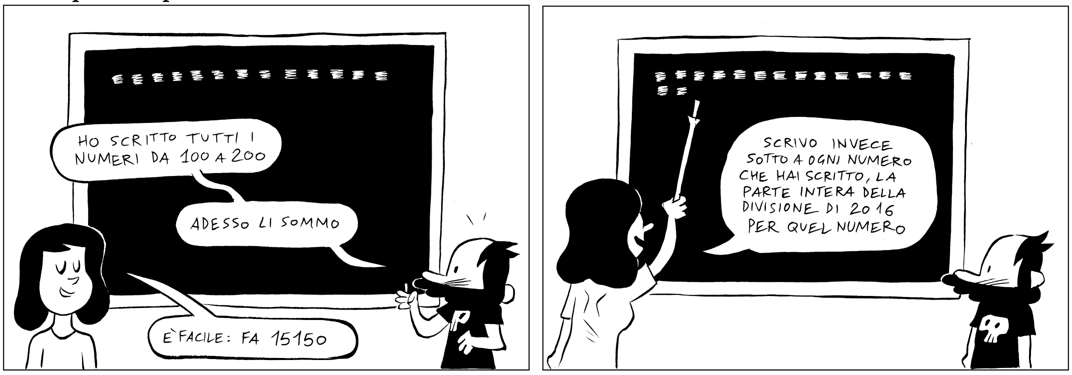
Di quanti cm^3 si deve far diminuire il volume per essere certi di far uscire 2 ml di fluido per lo spazzolino?
[Dare come risposta l'intero più vicino al risultato.]

4. ***Il secondo dubbio di Tuono***

5. ***La sveglia***

A partire dall'inizio dell'anno, qual è la prima scrittura $P_1P_2 : K_1K_2 : V_1V_2$ del T_1T_2/M_1M_2 in cui compaiono le dieci cifre?
[Dare come risposta $P_1P_2 + V_1V_2 \cdot T_1T_2 - K_1K_2 \cdot M_1M_2$.]

6. ***Il primo problema di Zoe***



Quanto fa la somma dei numeri scritti sulla riga inferiore?

7. ***Il primo robot indaffarato***
Su una scacchiera 20×16, un piccolo robot è posizionato sulla prima casella più in basso a sinistra ed è rivolto verso la casella più in alto a sinistra, la sedicesima. Il robot si può muovere sulla scacchiera utilizzando le seguenti mosse

(a) andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto;

(b) ruotare di 90° alla sua destra e andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto dopo la rotazione.

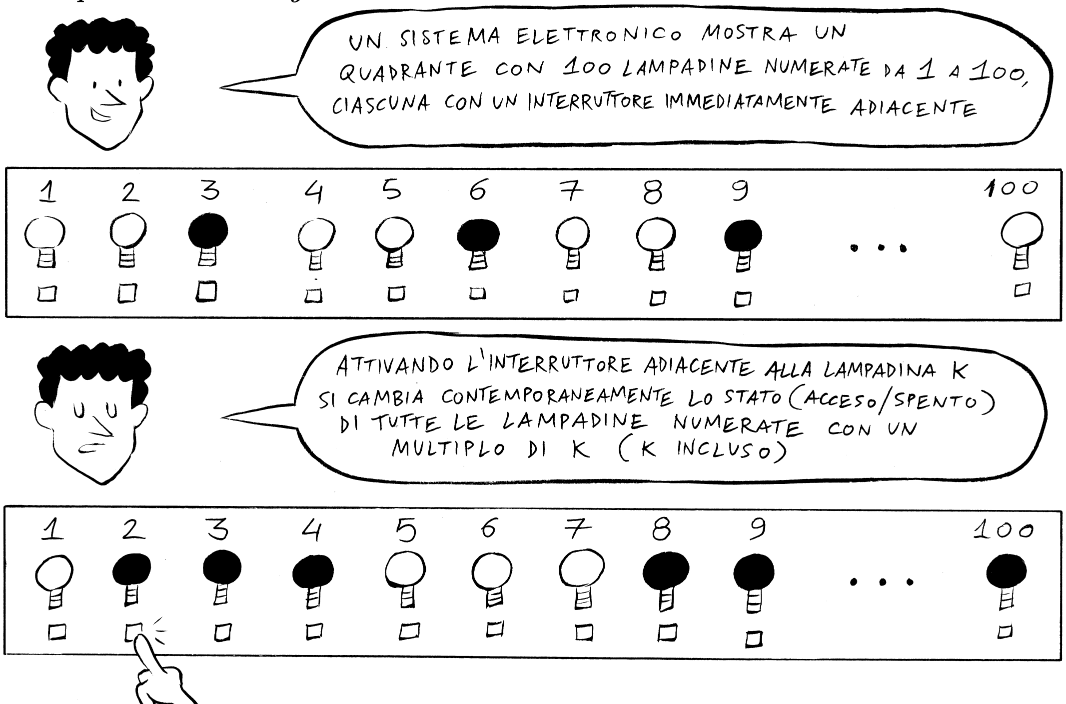
Il robot può fare quante mosse vuole, ma non può uscire dalla scacchiera, non può ritornare su una casella già visitata e deve continuare ad eseguire la stessa mossa finché non gli è più possibile eseguirla per rispettare le altre regole. Quante sono le caselle su cui gli può capitare di passare, sempre partendo dalla prima casella più in basso a sinistra e rivolto verso la casella più in alto a sinistra?

8. *La burocrazia perditempo*
River ha analizzato le regole che i 10000 sportelli, numerati da 1 a 10000, nel Palazzo della Burocrazia applicano per vidimare un modulo. Ha scoperto che ogni impiegato, quando una persona si presenta davanti al proprio sportello con un modulo da firmare, guarda nell'ordine un elenco di regole numerate ed effettua la prima che può essere effettivamente eseguita:

1. se $n \geq 300$ firma il modulo;
2. se n è divisibile per 5 non firma il modulo e manda la persona allo sportello n^2;
3. se n è divisibile per 3 non firma il modulo e manda la persona allo sportello $n + 100$;
4. se n è divisibile per 2 non firma il modulo e manda la persona allo sportello $n - 1$;
5. se n è divisibile per 11 non firma il modulo e manda la persona allo sportello pari alla somma delle cifre di n;
6. firma il modulo.

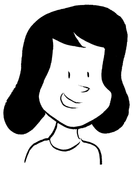
In particolare, se lo sportello a cui deve essere mandata la persona non esiste, firma il modulo. River determina da quale sportello inizia il giro che passa dal maggior numero di sportelli possibile prima di ottenere la firma sul modulo. Qual è il numero dello sportello determinato da River?

9. *Il quadrante di Kaylee*



Kaylee si trova davanti al quadrante: le lampadine sono tutte accese, deve lasciare accese soltanto la prima e l'ultima lampadina. Qual è il numero minimo di attivazioni di interruttori che Kaylee deve fare?

10. *Il secondo problema di Zoe*



Quanti interi positivi minori di 100 hanno la proprietà che il numero dei loro divisori interi positivi è uguale al prodotto delle loro cifre?

11. *La festa a Lilac*
Un operaio deve piazzare 2016 paletti per la festa nella grande piazza di Lilac secondo uno schema ben preciso. Incomincia fissando il paletto 1; si allontana dal paletto 1 di 1 m e fissa il paletto 2. A questo punto, con la schiena contro il paletto 2 ruota di 120° in senso antiorario rispetto alla direzione che aveva percorso dal paletto 1 al paletto 2 e fissa il paletto 3 dopo aver camminato per 2 m. Come prima, schiena al paletto 3, ruota di 120° in senso antiorario rispetto alla direzione dal paletto 2 al paletto 3, cammina per 3 m e fissa il paletto 4. Continua così finché non pianta a terra 2016 paletti. Quanto dista il paletto 1 dal paletto 2016?

12. *Le piante di fagioli*
Un contadino ha comprato da un membro dell'Alleanza una scatola di fagioli gialli. Ogni notte la pianta di fagiolo giallo cresce di $(1/n)$ m dove n è il numero di giorni passati dall'ultima volta che il terreno è stato concimato. La prima mattina il contadino semina un fagiolo e concima tutto il suo terreno, in accordo con la sua natura nella notte il fagiolo cresce di 1 m. In ognuna delle dieci mattine successive l'agricoltore farà una sola tra le seguenti due azioni: seminerà un nuovo fagiolo oppure concimerà tutto il suo terreno. All'alba del dodicesimo giorno, misura l'altezza di ogni sua piantina e ne calcola la somma in cm. Quanto vale, al massimo, tale somma?

13. *Il terzo dubbio di Tuono*

Considerato il polinomio $P(x)$ ottenuto facendo il prodotto dei 2016 polinomi

$$x+1, \quad x^2+2, \quad \ldots, \quad x^{2015}+2015 \quad \text{e} \quad x^{2016}+2016,$$

qual è il più piccolo intero positivo n tale che la somma dei coefficienti del polinomio $P(x)$ non è divisibile per n?

14. *Il circuito di Kaylee*
Un circuito elettronico consiste di 2016 dispositivi messi in fila. Ciascuno di questi, eccetto il primo e l'ultimo, è collegato con il precedente e con il successivo; il primo viene collegato solo con il successivo, l'ultimo viene collegato solo con il precedente. C'è un pulsante che, quando viene premuto, fornisce energia al primo dispositivo della fila. I dispositivi si comportano rispettando le seguenti regole:

- Se un dispositivo si trova nello stato $\boxed{\text{ON}}$ e riceve energia, cambia il suo stato in $\boxed{\text{OFF}}$ e passa energia al successivo.
- Se un dispositivo si trova nello stato $\boxed{\text{OFF}}$ e riceve energia, cambia il suo stato in $\boxed{\text{ON}}$ e non trasmette corrente al successivo.
- Se non riceve energia, un dispositivo rimane nello stato in cui si trova.

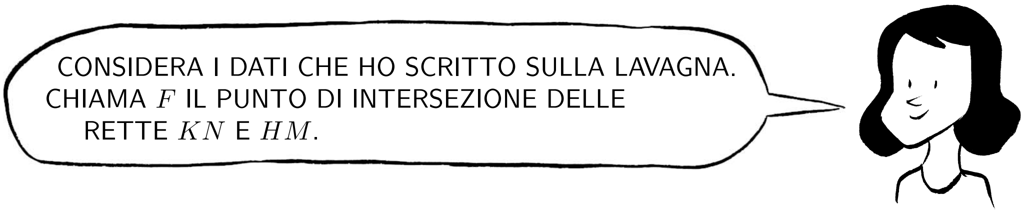
Kaylee è davanti al circuito elettronico e tutti i 2016 dispositivi si trovano nello stato $\boxed{\text{OFF}}$. Kaylee ha tempo da perdere e, per farlo passare, preme il pulsante per 2016 volte. A quel punto quanti sono i dispositivi nello stato $\boxed{\text{ON}}$?

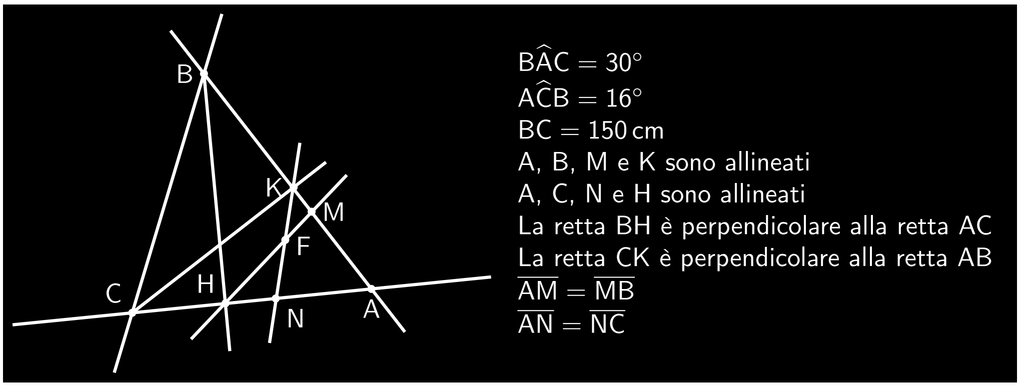
15. *I codici di River*
Indagando per scoprire il codice di accesso alla stanza di comando di Miranda, River ha dapprima scoperto che tale codice è collegato a due numeri interi positivi a e b e ad elenchi di numeri positivi ottenuti secondo le regole seguenti:

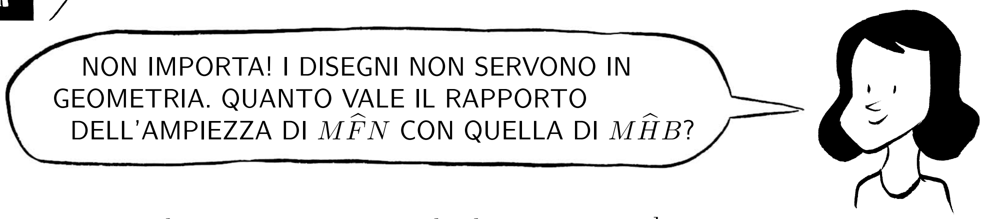
$$A_0 = a \quad A_1 = b \quad A_{n+2} = A_n - A_{n+1},$$

cioè, se A_k non è positivo, l'elenco termina e A_k non viene scritto. River ha anche scoperto che a è 2016 e b rende massimo il numero di termini dell'elenco. Quanto vale b?

16. ***Il terzo problema di Zoe***







[Dare come risposta il rapporto ottenuto moltiplicato per 1000.]

17. ***Il dado truccato di River***

River e Simon sono seduti a un tavolo, River ha in mano un dado a 6 facce, numerate da 1 a 6.

River Simon! Guarda che cosa ha regalato la mamma!

Simon Che cosa sarebbe? È un comunissimo dado a 6 facce.

River NO! Non è assolutamente comune.

Simon Cosa avrebbe di così stupefacente?

River È un dado truccato! Ho letto sulla scatola che lo conteneva che la probabilità che esca un numero dispari è tripla di quella che esca un numero pari, i numeri dispari escono con ugual probabilità tra loro, e così i numeri pari.

Simon Se ti diverti così... Fammelo usare. (*Prende il dado, lo lancia tre volte e segna i tre numeri usciti: 4, 5, 1.*)

Simon È uscito subito un numero pari e la somma dei tre numeri è 10, un numero pari... Secondo me è stata una grossa fregatura.

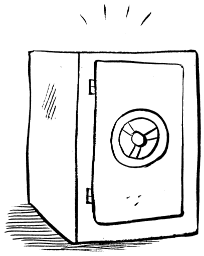
River Ti sbagli, hai assistito a qualcosa di straordinario. (*Scrive su un foglio le prime quattro cifre dopo la virgola della probabilità che, dopo tre lanci, la somma delle cifre faccia proprio* 10.)

[Dare come risposta quello che River ha scritto sul foglio.]

18. ***Il quarto dubbio di Tuono***

Valutato il numero n di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(x+y) + x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$ per tutti gli x, y in $\mathbb{R}$, sia $F(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ il prodotto dei valori di tutte tali n funzioni calcolate sull'argomento x. Quali sono le quattro cifre prima della virgola di $|F(2016)|$?

19. ***La cassaforte di Mal***
(con la partecipazione straordinaria di Tuono nella parte di Book)



Una cassaforte viene protetta da un codice a 4 cifre non tutte uguali. Perché tale combinazione non venga persa, Mal consegna a tre persone informazioni fondamentali per recuperarla. A Jayne consegna la somma della terza e della quarta cifra. A Book consegna il prodotto della seconda e della quarta cifra e la somma tra la prima e la terza cifra. A Zoe consegna la somma della prima e della seconda cifra. Passato un po' di tempo senza mai scambiarsi informazioni, i tre si incontrano e si dicono

Qual è il codice?

20. ***Energia per Serenity***
Un cubo è formato da 343 cubetti più piccoli, disposti in 7 piani da 49 cubetti ciascuno. Per poter estrarre un cubetto deve esistere un percorso libero dalla sua posizione fino all'esterno. Per fornire energia all'astronave Serenity, Mal deve estrarre esattamente 116 cubetti esponendo la superficie massima ottenibile. Quanti cm^2 vale tale superficie massima sapendo che il lato di ogni cubetto misura $1\,\mathrm{cm}$?

21. ***Il secondo robot indaffarato***
Su una scacchiera 10×8, un piccolo robot è posizionato sulla prima casella più in basso a sinistra ed è rivolto verso la casella più in alto a sinistra, l'ottava. Il robot si può muovere sulla scacchiera utilizzando le seguenti mosse

(a) andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto;

(b) ruotare di 90° alla sua destra e andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto.

Il robot può scegliere che mossa fare, ma non può uscire dalla scacchiera e non può ritornare su una casella già visitata. Si ferma soltanto quando non può più eseguire una mossa rispettando tutte le regole. Quanti sono i percorsi che può fare?
[Se il numero è superiore a 9999, dare come risposta le ultime quattro cifre del numero.]

22. ***La circonferenza di Wash***

Wash, per passare il tempo viaggiando nello spazio profondo, disegna una circonferenza di raggio 12 cm e disegna 4 punti A, B, C, D sulla circonferenza nel modo seguente. Fissato A, segna B in modo che AB sia lungo 9 cm; poi segna D dalla parte opposta a B rispetto ad A in modo che AD sia lungo quanto il raggio della circonferenza. A questo punto traccia l'altezza del triangolo ABD dal vertice A e indica con C il punto di intersezione dell'altezza con la circonferenza diverso da A. Qual è il rapporto tra la diagonale più corta e la diagonale più lunga del quadrilatero $ABCD$?

[Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola.]

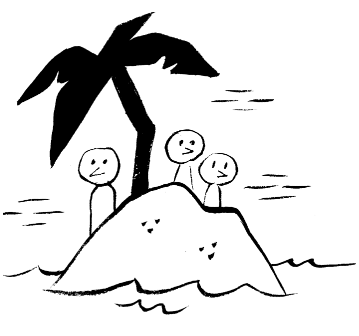
23. ***Giocando a Tri***

Mal e Inara giocano a Tri con un mazzo composto da tredici carte, di cui dieci sono numerate dall'1 al 10 e le altre tre sono figure. Nel gioco di Tri le carte numerate hanno il loro valore numerico, mentre le figure valgono 10. Il gioco si svolge come segue: Inara pesca una carta a caso dal mazzo, quindi Mal pesca a sua volta una carta a caso dalle rimanenti dodici. Se il valore della carta di Mal è divisibile per il valore della carta di Inara, Mal vince, altrimenti Mal pesca una nuova carta dalle rimanenti del mazzo. Se il prodotto delle due carte di Mal è divisibile per il valore della carta di Inara, Mal vince; si procede così finché Mal pesca la quinta carta; se anche con la quinta carta non ha vinto, Mal perde. Qual è la probabilità che Mal vinca?

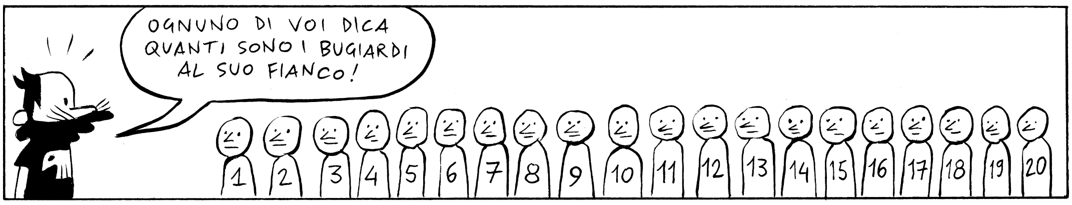
[Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.]

24. ***L'isola di Hol***

(con la partecipazione straordinaria di Tuono nella parte di Book)



I 20 abitanti della piccola isola di Hol sul pianeta Haven si dividono in tre tipologie. C'è la tipologia degli isolani sinceri che dicono sempre la verità, c'è la tipologia degli isolani bugiardi che dicono sempre il falso e c'è la tipologia degli isolani incerti che si adeguano ai modi di chi gli sta a destra, cioè un incerto dice il falso se l'isolano alla sua destra ha detto il falso, un isolano incerto dice il vero se l'isolano alla sua destra ha detto il vero, un isolano incerto non parla se, alla sua destra, non ha un isolano. Arrivato sul pianeta, Book visita l'isola di Hol, mette gli isolani in fila e appiccica un numero sul petto di ciascun isolano, in ordine da 1 fino a 20.



Iniziando da quello più vicino a Book, uno alla volta e seguendo l'ordine della fila, gli abitanti rispondono e curiosamente dicono tutti la stessa frase: «Esattamente uno.»

In base a queste risposte Book non è in grado di capire a quale tipologia appartiene ciascun abitante dell'isola, ma determina immediatamente tutte le configurazioni possibili in cui possono essere allineati isolani sinceri, isolani bugiardi e isolani incerti. Quante sono tali configurazioni?

[Una configurazione differisce da un'altra se nella prima c'è almeno un isolano che ha tipologia diversa da quella che lo stesso isolano ha nell'altra.]

Soluzioni per la Coppa Gauss 2016

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Matteo Bobbio, Mattia Fecit, Leonardo Gobbi, Francesco Morandin, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Franco Obersnel, Maurizio Paolini, Damiano Poletti, Francesco Raspaolo, Edi Rosset, Alberto Saracco.

Un ringraziamento particolare a Tuono Pettinato

che ha disegnato i problemi!

Soluzione del problema 1. Le soluzioni dell'equazione $x^2 - 20x + 2016 = 0$ sono 56 e 36.
La risposta è `6428`.

Soluzione del problema 2. Il caso peggiore è che tutti i gioielli rossi siano lisci, e quelli ruvidi siano tutti verdi. A questo punto affinché si abbia la certezza di pescare uno verde liscio deve essere 4500+5000+1=9501.
La risposta è `9501`.

Soluzione del problema 3. Ricordando la formula per il calcolo del volume di un tronco di cono e che è necessario considerare che possa uscire tutta l'aria interna prima del dentifricio, la soluzione è

$$\left[\frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) - 75\right] + 2 \approx 14.9$$

La risposta è `0015`.

Soluzione del problema 4. Un numero, se è divisibile per 5, 7, 8 e 9, è anche divisibile per 1, 2, 3, 4 e 6. $2520 - 2016 = 504$.
La risposta è `0504`.

Soluzione del problema 5. Tentiamo di minimizzare il giorno, poi l'ora. Per ottenere come mese gennaio (01), è necessario usare la cifra 2 per P_1, la cifra 3 è l'unica disponibile per T_1. Ma a quel punto non resta una cifra opportuna per T_2. Per febbraio (02) si ottiene una cosa analoga. Passando a marzo, si trova $17 : 48 : 59$ e 26/03 perché una soluzione $2P_2 : K_1K_2 : V_1V_2$ e $1T_2/03$ è impossibile perché non c'è cifra disponibile per P_2. La risposta da dare è il calcolo dell'espressione $17 + 59 \cdot 26 - 48 \cdot 03 = 1407$.
La risposta è `1407`.

Soluzione del problema 6. Si calcola la seguente tabella:

n	$[2016/n]$
$n = 100$	20
$101 \leq n < 107$	19
$107 \leq n < 113$	18
$113 \leq n < 119$	17
$119 \leq n < 127$	16
$127 \leq n < 135$	15
$135 \leq n < 145$	14
$145 \leq n < 156$	13
$156 \leq n < 169$	12
$169 \leq n < 184$	11
$184 \leq n \leq 200$	10

Sommando

$$20 \cdot 1 + 19 \cdot 6 + 18 \cdot 6 + 17 \cdot 6 + 16 \cdot 8 + 15 \cdot 8 + 14 \cdot 10 + 13 \cdot 11 + 12 \cdot 13 + 11 \cdot 15 + 10 \cdot 17 = 1366.$$

La risposta è `1366`.

Soluzione del problema 7. Gli unici percorsi completi che il robot può fare sono

- 1 mossa (b), poi 18 mosse (a) (lungo il bordo inferiore della scacchiera;
- 15 mosse (a) lungo il bordo sinistro della scacchiera, poi 2 mosse (b), quindi 14 mosse (a).

Dato che i due percorsi hanno in comune due caselle, il risultato è $20 + 15 \cdot 2 = 50$.
La risposta è `0050`.

Soluzione del problema 8. Se si applica la regola 2, questa continua a essere applicata; le uniche sequenze di tre sportelli sono a partire da 5 e da 10.
Se si applica la regola 3 (dunque il numero non è un multiplo di 5) e allo sportello successivo non si applica la regola 6, quest'ultima deve essere la regola 4 oppure la regola 5. Se si applica la regola 4, allo sportello successivo si applica la regola 3 perché sicuramente la regola 2 non è applicabile. Se al successivo sportello si applica la regola 4, allo sportello dopo questo si applica la regola 3 e si arriva ad uno sportello con numero maggiore di 300. Gli sportelli visitati sono al massimo 5 a patto che il numero sia minore di 100.
Se si applica la regola 4 e non si cade in una delle sequenze precedenti, si applica la regola 5 che produce un numero minore di o uguale a $18 = 1 + 9 + 8 = 2 + 9 + 7$.
Gli sportelli a cui si applica la regola 5 sono quelli numerati $77 = 7 \cdot 11$, $121 = 11 \cdot 11$, $143 = 13 \cdot 11$, $187 = 17 \cdot 11$, $209 = 19 \cdot 11$, $253 = 23 \cdot 11$. Le sequenze più lunghe di sportelli che iniziano da uno di questi portano a 4 sportelli e sono

$$\begin{array}{l}
121 \to 4 \to 3 \to 103 \\
187 \to 16 \to 15 \to 225 \\
209 \to 11 \to 2 \to 1 \\
253 \to 10 \to 100 \to 10000
\end{array}$$

A questo punto, resta da cercare quali sequenze di sportelli conducono ad uno di questi:

- L'unico sportello che manda a 121 è il 21 e l'unico che manda a 21 è il 22.
- Gli unici sportelli che mandano a 187 sono 188, che non è raggiungibile da nessuno sportello, e 87 che è raggiungibile soltanto da 88.
- Lo sportello 209 non è raggiungibile da nessuno sportello.
- Lo sportello 253 è raggiungibile dallo sportello 254, che non è raggiungibile da nessuno sportello, e dallo sportello 153, raggiungibile da 154, a sua volta raggiungibile da 54.

La sequenza più lunga di sportelli è

$$54 \to 154 \to 153 \to 253 \to 10 \to 100 \to 10000.$$

La risposta è `0054`.

Soluzione del problema 9. Per prima cosa Kaylee si occuperà di attivare tutti gli interruttori con un numero primo. i numeri primi tra 1 e 100;

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & 23 & 29 & 31 & 37 & 41 \\ & 43 & 47 & 53 & 59 & 61 & 67 & 71 & 73 & 79 & 83 & 89 & 97 \end{array}$$

sono 25. Quindi muove 25 interruttori. Le lampadine che rimangono sicuramente accese sono quelle che hanno come numero uno scomponibile con esattamente 2 numeri primi diversi; le combinazioni di 2 numeri primi diversi tali che il loro prodotto sia più piccolo di 100 sono le seguenti: al numero 2 corrispondono i primi diversi da 2 e minori di 50 che sono 14; al numero 3 quelli compresi tra 4 e 33 che sono 9; al numero 5 quelli compresi tra 6 e 20 che sono 5; al numero 7 quelli compresi tra 8 e 14 che sono 2. Tra questi si osserva che rimangono accesi quelli scomponibili nel prodotto di 3 numeri primi diversi, poiché tali lampadine vengono mosse 6 volte, quindi lasciando inalterato lo stato iniziale. Si ripete quindi il procedimento precedente cercando terne di numeri primi differenti tali che il loro prodotto non sia maggiore di 100. Fissati 2 e 3, si cercano i numeri primi compresi tra 4 e 16 che sono 4. Fissati 2 e 5, si trova il numero primo 7, poi nient'altro. Quindi, tutti i numeri compresi tra 2 e 100 si possono dividere per almeno uno dei numeri così costruiti, quindi a questo punto il sistema elettronico vede la sola lampadina numero 1 accesa. Si attiva l'interruttore numero 100. Quindi il minor numero di movimenti di interruttori è dato dalla seguente somma: 25+30+5+1=61.
La risposta è `0061`.

Soluzione del problema 10. Sia d_n il numero dei divisori (interi positivi) di n intero positivo < 100 e p_n il prodotto delle sue cifre. Diciamo che n è *accettabile* se $d_n = p_n$.
Ricordiamo che se $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ con p_i primi distinti, $d_n = \prod_{i=1}^{k} (e_i + 1)$.
Se $d_n = 1$ allora $n = 1$, che è accettabile.
Se $d_n = 2$ allora n è primo; l'unico naturale accettabile è 2 stesso.
Se $d_n = 3$, n deve essere un quadrato perfetto. Ma il prodotto delle cifre deve essere 3 quindi se $d_n = 3$ non esistono numeri accettabili.
Se $p_n = 4$, allora $n = 4$ o $n = 14$ o $n = 22$ o $n = 41$. Gli unici accettabili sono $n = 14$ e $n = 22$.
Se $p_n = 5$, allora $n = 5$ o $n = 15$ o $n = 51$. Nessuno accettabile.
Se $p_n = 6$, allora $n = 6$ o $n = 16$ o $n = 23$ o $n = 32$ o $n = 61$. 32 è l'unico accettabile.
Se $p_n = 7$, allora $n = 7$ o $n = 17$ o $n = 71$. Nessuno è accettabile.
Se $p_n = 8$, allora $n = 8$ o $n = 18$ o $n = 24$ o $n = 42$ o $n = 81$. 24 e 42 sono accettabili.
È facile osservare che per $d_n \geq 9$ non esistono altri n accettabili < 100.
La risposta è `0007`.

Soluzione del problema 11. I paletti numerati con numeri multipli di 3 e il paletto 1 sono allineati; la distanza tra due successivi è $\frac{2016}{\sqrt{3}}$ m. La distanza tra il paletto 1 e il paletto 3 è uguale all'altezza di un triangolo equilatero di lato 2 m ed è lunga $\sqrt{3}$ m. La retta passante per i paletti 1 e 2 interseca il segmento congiungente i paletti 5 e 6, sia A tale intersezione. Si ha che che la distanza da A al paletto 6 è 4 m e quella da A al paletto 1 è 2 m. Applicando il teorema di Pitagora, la distanza tra i paletti 1 e 6 è $2\sqrt{3}$ m. A questo punto si trova per induzione che la distanza tra 1 e $3k$ è $k\sqrt{3} = \frac{3k}{\sqrt{3}}$. Perciò la distanza richiesta è $\frac{2016}{\sqrt{3}} = 1163.938\ldots$
La risposta è `1163`.

Soluzione del problema 12. Supponiamo che il contadino utilizzi la strategia migliore, cioè quella che massimizza la somma richiesta. Osserviamo che ogni giorno la somma delle altezze cresce di $\frac{p}{n}$ m dove p rappresenta il numero di piante e n come da testo. La strategia migliore risulta essere:

giorno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
azione	PC	P	P	P	P	C	P	C	C	C	C
p	1	2	3	4	5	5	6	6	6	6	6
n	1	2	3	4	5	1	2	1	1	1	1
$\frac{p}{n}$	1	1	1	1	1	5	3	6	6	6	6

dove C rappresenta l'azione "concimare" e P l'azione "piantare una nuova pianta". Il fatto che questa sia la migliore soluzione è facilmente osservabile cercando di modificarla aumentando l'altezza: sia cercare di raggiungere 7 piante, sia fermarsi a 5 risulta fallimentare. Non esistono poi, evidentemente strategie migliori arrivando a 6 piante. Sommando si ottiene

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 3 + 6 + 6 + 6 + 6) \cdot 100 = 3700.$$

La risposta è 3700.

Soluzione del problema 13. La somma dei coefficienti di $P(x)$ è $P(1) = 2017!$. Perciò il numero da trovare è il minimo numero primo maggiore di 2017, cioè 2027.
La risposta è 2027.

Soluzione del problema 14. La prima volta che si preme il pulsante, solo il primo dipositivo di accende e tutti gli altri rimangono spenti. La seconda volta, visto che il primo è nello stato $\boxed{\text{ON}}$, cambia il suo stato in $\boxed{\text{OFF}}$ e passa corrente al secondo, che da $\boxed{\text{OFF}}$ cambia in $\boxed{\text{ON}}$. Quindi la situazione è la seguente: *dispositivo*$_1$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, *dispositivo*$_2$ stato $\boxed{\text{ON}}$, *dispositivo*$_3$ stati $\boxed{\text{OFF}}$, e tutti gli altri saranno in stato $\boxed{\text{OFF}}$. La terza volta, la situazione sarà la seguente: *dispositivo*$_1$ stato $\boxed{\text{ON}}$, *dispositivo*$_2$ stato $\boxed{\text{ON}}$, *dispositivo*$_3$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, visto che il dispositivo 1 era in stato $\boxed{\text{OFF}}$ ha mutato il suo stato in $\boxed{\text{ON}}$ e non ha trasmesso corrente al secondo. La quarta volta, otteniamo: *dispositivo*$_1$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, *dispositivo*$_2$ stato $\boxed{\text{OFF}}$, *dispositivo*$_3$ stati $\boxed{\text{ON}}$. Visto che il primo ha passato corrente al secondo e si è spento, il secondo ha ricevuto corrente e si è spento passando corrente al terzo che si è acceso. Si può notare che questo procedimento è uno dei possibili procedimenti per convertire un numero decimale in un numero binario. Infatti, prendendo $\boxed{\text{ON}}$ =1 e $\boxed{\text{OFF}}$ =0, con 1 si ottiene 1, con 2 si ottiene 10, con 3 si ottiene 11, con 4 si ottiene 100 e così via. Per dare la risposta, quindi, basta convertire in binario il numero 2016 e contare quanti 1 vi sono. 2016 in base 2 è 11111100000, in quanto $2016 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32$. Quindi tutti i dispositivi accesi sono 6.
La risposta è 0006.

Soluzione del problema 15. I primi termini della successione sono $A_0 = 2016 = a$, $A_1 = b$ e $A_2 = 2016 - b$; in generale,

$$A_{n+1} = (-1)^n bF_{n+1} + (-1)^{n+1} aF_n$$

dove $(F_n)_n$ è la successione di Fibonacci con dati iniziali $F_0 := 0$ e $F_1 := 1$. Infatti, per $n > 0$, si ha che

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= A_n - A_{n+1} \\ &= (-1)^{n-1} bF_n + (-1)^n aF_{n-1} + (-1)^{n+1} bF_{n+1} + (-1)^n aF_n \\ &= (-1)^{n-1} b(F_n + F_{n+1}) + (-1)^n a(F_{n-1} + aF_n) \\ &= (-1)^{n+1} bF_{n+2} + (-1)^{n+2} aF_{n+1}. \end{aligned}$$

La condizione che A_n sia positivo corrisponde a due richieste sul rapporto tra b e a a seconda della parità di n:

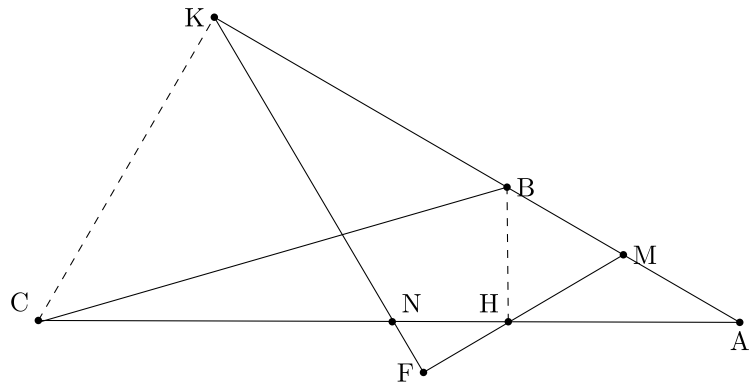
$$\frac{F_{2i}}{F_{2i+1}} < \frac{b}{a} < \frac{F_{2i+1}}{F_{2i+2}}.$$

Dato che entrambe le successioni convergono (crescendo e decrescendo, rispettivamente) a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $2016 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1245.9$, per $b = 1246$ esiste un i tale che, da quell'indice in poi, la successione A_{2i+2} è a termini negativi. Si trova del resto che

$$a\frac{F_{11}}{F_{12}} = \frac{2016 \cdot 89}{144} = 1246 < \frac{2016 \cdot 34}{55} = a\frac{F_9}{F_{10}} = 1246.\overline{254}.$$

La risposta è `1246`.

Soluzione del problema 16. La situazione descritta è rappresentata più accuratamente come segue



È $A\widehat{C}K = H\widehat{B}A = 60°$ perché complementari di $B\widehat{A}C$. Dunque, dato che $C\widehat{K}A$ è retto, $CK = CN$, così' come $BH = BM$ dato che $B\widehat{H}A$ è retto. Quindi i triangoli BHM e CNK sono equilateri, da cui $B\widehat{H}M = B\widehat{M}H = 60°$. Inoltre, AKN è isoscele, così $N\widehat{K}A = 30°$ e $M\widehat{F}k = 90°$. La frazione richiesta, quindi, risulta essere $\dfrac{N\widehat{F}M}{B\widehat{H}M} = \dfrac{90}{60} = \dfrac{3}{2} = 1.5$.
La risposta è `1500`.

Soluzione del problema 17. Si osserva innanzitutto che la probabilità che esca un numero dispari è $\frac{1}{4}$ mentre quella che esca un numero pari è $\frac{1}{12}$. Si osserva anche che un numero pari si ottiene sommando 3 numeri pari oppure sommando 1 pari e 2 dispari. Si osserva poi che la probabilità che esca una terna di numeri pari è $\alpha := (\frac{1}{12})^3$, mentre quella che esca un pari e 2 dispari è $\beta := (\frac{1}{4})^2 \frac{1}{12}$. Si considerano ora tutte le terne di lanci che soddisfano la richiesta separandole per tipologia:
$(1,3,6),(1,4,5),(1,5,4),(1,6,3) = 4\beta$
$(2,2,6),(2,5,3),(2,4,4),(2,3,5),(2,6,2) = 3\alpha + 2\beta$
$(3,1,6),(3,2,5),(3,3,4),(3,4,3),(3,5,2),(3,6,1) = 6\beta$
$(4,1,5),(4,2,4),(4,3,3),(4,4,2),(4,5,1) = 2\alpha + 3\beta$
$(5,1,4),(5,2,3),(5,3,2),(5,4,1) = 4\beta$
$(6,1,3),(6,2,2),(6,3,1) = \alpha + 2\beta$.
La soluzione del problema è

$$21\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{12} + 6\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{21}{192} + \frac{1}{288} = 0.112847\ldots$$

La risposta è 1128. La risposta è `1128`.

Soluzione del problema 18. Dato che $f(x) = f(x) \cdot f(0)$ si trova che $f(x) = f(x) \cdot f(0)$, dunque $f(0) = 1$ oppure $f(0) = 0$. Ma il secondo caso non può avvenire, altrimenti per ogni x sarebbe $f(x) = 0$, da cui per ogni x si avrebbe $x^2 = f(2x) - f(x)^2 = 0$ che è assurdo. Sia $a := f(1)$. Ne segue che

$$1 = f(1-1) = f(1) \cdot f(-1) + 1 = a \cdot f(-1) + 1$$

da cui $f(-1) = 0$ se $a \neq 0$. Si trova poi che

$$\begin{aligned}
f(2) &= f(1) \cdot f(1) - 1 = a^2 - 1 \\
f(3) &= f(2) \cdot f(1) - 2 = a^3 - a - 2 \\
f(4) &= f(2) \cdot f(2) - 4 = a^4 - 2a^2 - 3 \\
f(4) &= f(1) \cdot f(3) - 3 = a^4 - a^2 - 2a - 3
\end{aligned}$$

Dunque $a^2 - 2a = 0$, da cui $a = 2$ oppure $a = 0$. Quando $a = 0$, si ha $f(x) = f((x-1)+1) = f(x-1) \cdot f(1) - x + 1 = 1 - x$. Quando $a = 2$, si ha $f(x) = f((x+1) - 1) = f(x+1) \cdot f(-1) + x + 1 = 1 + x$. Quindi $n = 2$, $F(x) = (1 + x) \cdot (1 - x) = 1 - x^2$. A questo punto rimane solo da calcolare $|F(2016)| = 4064255$.
La risposta è 4255.

Soluzione del problema 19. L'informazione che Jayne conosce terza e quarta cifra dice che, con la sola somma della terza e della quarta cifra, si riesce ad identificarle univocamente. Ciò vuol dire che la somma è 0 o 18, quindi le ultime due cifre sono 00 o 99. Queste informazioni possono essere ricavate anche da Book, che però non riesce a determinare l'intera combinazione. Se i due numeri che conosce fossero diversi da 0 saprebbe che le ultime due cifre sono 99 (e determinerebbe l'intera combinazione). Dunque il prodotto che conosce è 0 e la somma che conosce è minore di 9 perché, se tale somma fosse 9 (o maggiore di 9), allora Book non sarebbe in grado di concludere nulla sulle cifre della combinazione (il prodotto potrebbe essere 0 perché la prima cifra è 0). Dunque, dato che Book determina tre cifre della combinazione, il prodotto che ha Book è 0 e la somma che ha è un numero minore di 9. Zoe, quindi, sa che le ultime due cifre sono 00 e che la prima cifra è minore di 9. Perché possa sapere la combinazione per intero deve essere in condizioni tali da avere una possibilità che soddisfi tutte le richieste. Questo accade soltanto quando la somma che legge Zoe è 17 dove la combinazione 9800 è da escludere per quanto determinato da Book sulla somma di prima e terza cifra.
La risposta è 8900.

Soluzione del problema 20. Il massimo contributo di facce "scoperte", ottenibile estrando un cubetto, è 4: deve essere un cubetto interno a una faccia. Il modo migliore per estrarne da una faccia è il seguente

	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	
		X		X		
	X		X		X	

Sono 13 cubetti per faccia, in totale $13 \times 6 = 78$. A questo punto si possono togliere cubetti a un livello più interno facendo attenzione che i cubetti tolti più vicino ai vertici, hanno già un vertice in comune con un cubetto tolto da un'altra faccia. Si possono togliere quelli marcati con Y nel riquadro sotto

	X		X		X	
		Y		Y		
	X		Y		X	
		Y		Y		
	X		X		X	

Sono 5 per faccia, in totale 30. Come prima, si può togliere ulteriormente un cubetto al livello ancora più interno per ciascuna faccia, in totale 6. I cubetti estratti fiora soo 114. Gli ultimi due non permettono di "guadagnare" 4 facce, ma soltanto 2, basta toglierli in punti opportuni lungo gli spigoli del cubo esterno. In totale la superficie esposta è

$$6 \times 7 \times 7 + 4 \times 114 + 2 \times 2 = 754.$$

La risposta è `0754`.

Soluzione del problema 21. L'idea risolutiva è notare che, una volta che il robot ha lasciato una linea di celle che stava percorrendo per girare a destra, non può più farvi ritorno. A questo punto, il problema da risolvere è lo stesso di prima, ma con una linea di celle in meno e ruotato di 90°. In generale, quindi, si può pensare di risolvere il problema in modo ricorsivo tramite la seguente relazione. Sia $\mathrm{path}(r, c)$ il numero di possibili percorsi fattibili dal robot una volta dati il numero r di righe davanti al robot e il numero c di colonne alla destra del robot; per le considerazioni precedenti

$$\mathrm{path}(r, c+1) = \sum_{h=1}^{r} \mathrm{path}(c, h)$$

dove i casi base sono che $\mathrm{path}(r, 1) = \mathrm{path}(1, c) = 1$. A questo punto, rimane solamente da svolgere i conti per la richiesta del problema (ricordando che facendo i conti si deve operare modulo 10000) il risultato ottenuto è 1440.
Si può anche notare che $\mathrm{path}(\ell + 1, k + 1) = \binom{\ell+k}{k}$ per induzione su $\ell + k$ dato che

$$\mathrm{path}(\ell+1, k+2) = \sum_{h=1}^{\ell+1} \mathrm{path}(k+1, h) = \sum_{h=0}^{\ell} \binom{k+h}{h} = \binom{k+\ell+1}{\ell} = \binom{\ell+k+1}{k+1}$$

e

$$\mathrm{path}(\ell+2, k+2) = \sum_{h=1}^{\ell+2} \mathrm{path}(k+1, h) = \sum_{h=0}^{\ell+1} \binom{k+h}{k} = \binom{k+\ell+1}{k}$$

per $k \leq \ell$.
La risposta è `1440`.

Soluzione del problema 22. Sia O il centro della circonferenza, sia H l'intersezione tra le diagonali del quadrilatero. Sia $r = 12\,\mathrm{cm}$. Siccome $AD = r$ è $\widehat{AOD} = 60^o$. Avremo quindi che $\widehat{ACD} = 30^o$. Inoltre sappiamo che $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ quindi abbiamo che ABH e DCH sono triangoli rettangoli simili con angoli 30^o e 60^o. Dato che $AB = \frac{3}{4}r$, si ha che $AH = \frac{3}{8}r$ e $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{4}r = \frac{3\sqrt{3}}{8}r$. D'altra parte abbiamo che il triangolo ADH è rettangolo con ipotenusa $AD = r$ e cateto minore $AH = \frac{3}{8}r$. Quindi $HD = \frac{\sqrt{55}}{8}r$. Infine $CH = \sqrt{3}HD = \frac{\sqrt{3}\sqrt{55}}{8}r$.
La richiesta è il rapporto $\dfrac{BH + HD}{AH + HC}$ se è minore di 1, altrimenti il reciproco:

$$\frac{BH + HD}{AH + HC} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{55}}{8} \frac{8}{3 + \sqrt{3}\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{55}}{3 + \sqrt{3}\sqrt{55}} = 0.795971\ldots$$

Con le approssimazioni iniziali il risultato è $0.7959611\ldots$.
La risposta è `7959`.

Soluzione del problema 23. Osserviamo innanzitutto che Mal vince se e solo se, dopo aver pescato 5 carte, il prodotto di queste è divisibile per il valore della carta di Inara. Questo ci permette di non preoccuparci del fatto che si fermi alla prima carta se ha già vinto, ci possiamo tranquillamente concentrare sulle 5 carte insieme. Le combinazioni di carte possibili pescate da Mal sono $\dbinom{12}{5} = 792$. Ora costruiamo la seguente tabella distinguendo le possibili pescate dal banco e mostra i casi favorevoli in ogni pescata.

carta pescata da Inara	combinazioni favorevoli a Mal
1	792
2	792 - 1 $= 791$
3	$792 - \binom{10}{5} = 540$
4	$792 - 1 - 6\binom{5}{4} = 761$
5	$792 - \binom{8}{5} = 736$
6	$792 - \binom{10}{5} - 1 = 539$
7	0
8	$792 - 1 - 6\binom{5}{4} - 5 - \binom{6}{2}\binom{5}{3} = 606$
9	$\binom{10}{3} = 120$
10	$792 - 1 - \binom{8}{5} = 735$

Di conseguenza la probabilità di vittoria è

$$\frac{1}{13}\left(1 + \frac{791}{792} + \frac{540}{792} + \frac{761}{792} + \frac{736}{792} + \frac{539}{792} + \frac{606}{792} + \frac{120}{792} + \frac{4 \cdot 735}{792}\right) = \frac{7825}{10296} \approx 0,7600039$$

La risposta è `7600`.

Soluzione del problema 24.
Il primo non può essere incerto. Consideriamo il caso che sia un bugiardo. Le configurazioni che si sviluppano da un bugiardo possono essere di tre tipi

$$\begin{array}{lcccc}
\text{posizione} & k & k+1 & k+2 & k+3 \\
\hline
 & & & \mathrm{S} \longrightarrow & \mathrm{B} \\
 & & \nearrow & & \\
 & & \mathrm{S} \longrightarrow & \mathrm{I} \longrightarrow & \mathrm{B} \\
 & \nearrow & & & \\
 & \mathrm{B} \longrightarrow & \mathrm{I} \longrightarrow & \mathrm{B} &
\end{array}$$

Nel caso che il primo sia sincero, il secondo è necessariamente bugiardo e, da quello in poi, la configurazione si sviluppa nello stesso modo. Infine, una configurazione può terminare con un bugiardo, oppure con una sequenza di tipo B $\to$ S. Il numero $b(k)$ di bugiardi che compaiono al k-esimo livello in una configurazione in cui il primo è bugiardo è dato dalla seguente ricorsione:

$$\begin{cases} b(1) = 1 \\ b(2) = 0 \\ b(3) = 1 \\ b(n+3) = 2b(n) + b(n+1) \quad \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

Il risultato è

$$b(20) + b(19) + b(19) + b(18) = 3100.$$

La risposta è `3100`.